

# 多小波图象编码

黄卓君 马争鸣

(中山大学电子系信息处理实验室, 广州 510275)

**摘要** 首先, 与许多有关多小波的文献不同, 该文从 Mallat 多分辨率分析的角度叙述多小波理论, 并由此推导出多小波变换的快速算法; 其次, 结合二种常用的多小波图象变换预处理方法, 提出了一种新的预处理方法. 最后, 揭示了经多小波分解后, 同一幅矢量量子带图象不同分量图之间的相关性, 并利用这种相关性进行图象编码. 理论分析和实验数据都表明, 多小波图象编码是一种很有潜力的图象编码方法.

**关键词** 多小波 图象编码 相关性

**中图分类号:** TN919 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2000)04-0309-09

## Multiwavelet Image Coding

HUANG Zhuo-jun, MA Zheng-ming

(Information Processing Lab, Radioelectronics Dept., Zhongshan Univ., Guangzhou 510275)

**Abstract** This paper investigates multiwavelet image coding. Firstly, unlike many papers on multiwavelets, we describe multiwavelets from the viewpoint of Mallat's frame of multiresolution analysis and deduce a fast algorithm of multiwavelet transform. Secondly, combining two preprocessing methods of multiwavelet transform of images commonly used in many papers, we propose a new preprocessing method. Lastly, we reveal the dependence between different components of a vector-subimage emerged after multiwavelet transforming an image and perform image coding based on this dependence. The theoretical analysis and experimental results presented in this paper show that multiwavelet image coding is a promising way to compress an image.

**Keywords** Multiwavelet, Image coding, Dependence

## 0 引言

本文研究了一些多小波图象编码文献<sup>[1~4]</sup>. 首先, 与许多有关多小波的文献不同, 本文不是从多尺度矩阵方程<sup>[5]</sup>角度, 而是从 Mallat 多分辨率分解<sup>[6]</sup>的角度来叙述多小波理论, 并由此推导出多小波变换的快速算法, 因为毕竟对于许多从事小波图象编码的人来说, Mallat 的理论及其算法是最为熟悉的; 其次, 本文结合二种常用的多小波图象变换预处理方法<sup>[7]</sup>, 提出了一种新的预处理方法. 这种新的预处理方法在能量汇聚方面要优于前二种预处理方法. 最后, 本文揭示了图象多小波分解后同一幅矢量量子带图象不同分量图之间的相关性, 并利用这种相关性进行了粗略编码.

这种相关性是多小波特有的, 是单小波无法提供的. 我们认为, 迄今为止, 多小波图象编码的效果与单小波图象编码的效果难分伯仲, 原因之一, 恐怕就是没有充分利用这种相关性进行图象编码的缘故.

## 1 多小波和多小波变换快速算法

我们从 Mallat 多分辨率分解<sup>[6]</sup>的角度来叙述多小波理论, 并推导出多小波变换的快速算法. 这样做的好处是可以把多小波看成是单小波的自然推广, 单小波是多小波的特例, 由此得到的多小波变换快速算法也是 Mallat 算法的自然推广, 既适合多小波, 也适合单小波.

### 1.1 多小波

定义 一族闭子空间  $\{V_j | j \in Z\}$  称为  $L^2(R)$  的一个多分辨率分解, 如果它们满足下列条件:

- (1) 对于任意  $j \in Z, V_j \subseteq V_{j+1}$ ;
- (2)  $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$  在  $L^2(R)$  中稠密, 也即  $L^2(R) = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j}$ ;

- (3)  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ ;
- (4) 对于任意  $j \in Z$  和  $f(x) \in L^2(R), f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ ;
- (5) 对于任意  $n \in Z$  和  $f(x) \in L^2(R), f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-n) \in V_0$ ;

(6) 存在  $V_0$  空间中的多个函数  $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^K(x)$ , 称之为多尺度函数, 使得  $\{\varphi^k(x-n) | 1 \leq k \leq K, n \in Z\}$  构成  $V_0$  空间的标准正交基.

从上面的定义中可以看到, 多尺度函数不是多个尺度函数的简单堆积, 它们必须满足

$$\langle \varphi^k(\cdot - n), \varphi^p(\cdot - m) \rangle = \delta(k - p) \delta(n - m),$$

$$1 \leq k, p \leq K, n \in Z$$

这里  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示内积.

由多尺度函数可以得到多小波.

定理 设一族闭子空间  $\{V_j | j \in Z\}$  是  $L^2(R)$  的一个多分辨率分解, 且  $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^K(x)$  是这个分解的多尺度函数,  $W_0$  是  $V_0$  在  $V_1$  中的正交补空间, 也即  $W_0 = \{x | x \in V_1, x \perp V_0\}$ , 则存在  $W_0$  空间中的多个函数  $\psi^1(x), \psi^2(x), \dots, \psi^K(x)$ , 称之为多小波, 使得  $\{\psi^k(x-n) | 1 \leq k \leq K, n \in Z\}$  构成  $W_0$  空间的标准正交基.

定理证明的基本思路可参考文献[5]. 同样地, 多小波也不是多个小波的简单堆积, 它们必须满足  $\langle \psi^k(\cdot - n), \psi^p(\cdot - m) \rangle = \delta(k - p) \delta(n - m), 1 \leq k, p \leq K, n \in Z$

1994年, Geronimo, Hardin 和 Massopust<sup>[1]</sup> 给出了一个多小波的例子, 称为 GHM 多小波. GHM 多小波由二个多尺度函数  $(\varphi^1(x), \varphi^2(x))$  组成, 相应地, 也有二个多尺度函数  $(\psi^1(x), \psi^2(x))$ .

从图 1 可见, 多小波和多尺度函数都是短支撑的, 其非零区间不超出  $[0, 2]$ . 另外, 经过适当平移, 多小波和多尺度函数都是关于纵轴对称的或反对称的. 这些性质是单小波及其尺度函数不可能同时具备的 (Harr 小波除外).

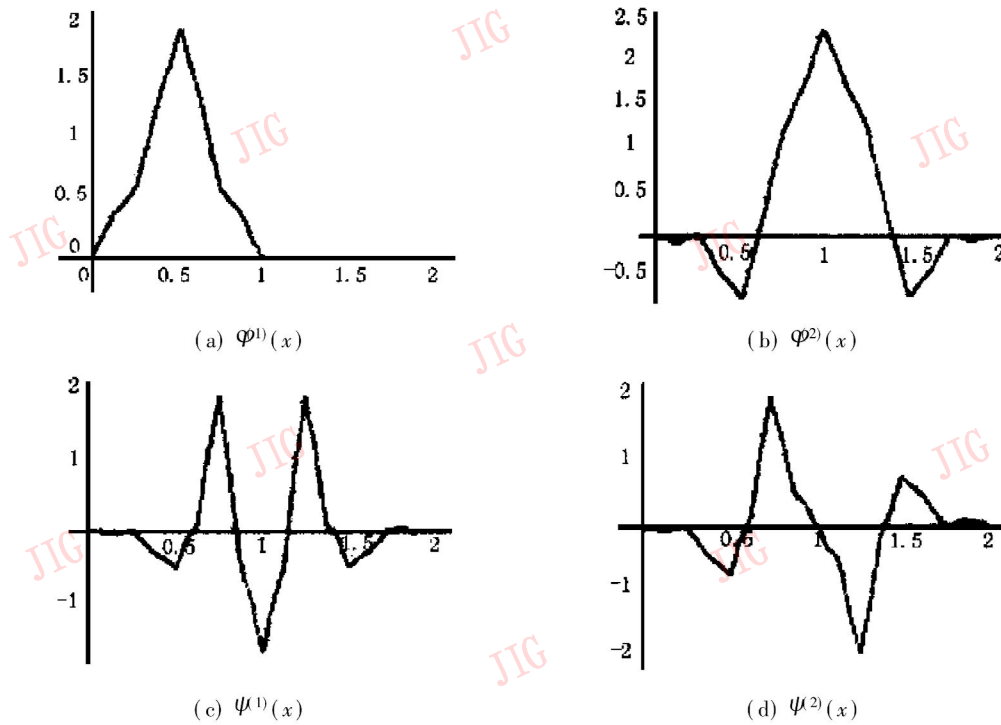


图 1 GHM 多小波

### 1.2 多小波变换的快速算法

根据多分辨率分解的定义以及多尺度函数和多小波的性质, 不难证明下面的定理.

定理 设一族闭子空间  $\{V_j | j \in Z\}$  是  $L^2(R)$  的

一个多分辨率分解, 且  $\{\varphi^k(x) | 1 \leq k \leq K\}$  和  $\{\psi^k(x) | 1 \leq k \leq K\}$  分别是这个分解的多尺度函数和多小波,  $W_j$  是  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间, 也即  $W_j = \{x | x \in V_{j+1}, x \perp V_j\}$ ,

- (1) 如果令  $\Phi_s^{(k)}(x) = \sqrt{s} \Phi^{(k)}(sx), s > 0$ , 则  $\left\{ \Phi_s^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| \mid 1 \leq k \leq K, n \in Z \right\}$  是  $V_j$  空间的标准正交基.
  - (2) 如果令  $\Psi_s^{(k)}(x) = \sqrt{s} \Psi^{(k)}(sx), s > 0$ , 则  $\left\{ \Psi_s^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| \mid 1 \leq k \leq K, n \in Z \right\}$  是  $W_j$  空间的标准正交基.
- 利用本定理, 可以得到对信号进行多小波变换(分解)和反变换(重建)的快速算法.

1.2.1 分解的快速算法

令  $H(n) = \begin{pmatrix} h^{(1,1)}(n) & \dots & \dots & h^{(1,K)}(n) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h^{(K,1)}(n) & \dots & \dots & h^{(K,K)}(n) \end{pmatrix}$ , 这里,  $h^{(p,q)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2^{(p)}(t) \Phi^{(q)}(t-x) dt, 1 \leq p, q \leq K$ ,

于是, 根据标准正交基的性质, 我们可以得到多尺度矩阵方程:

$$\begin{aligned} \Phi_{2^j} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| &= \begin{pmatrix} \Phi_{2^j}^{(1)} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| \\ \vdots \\ \Phi_{2^j}^{(K)} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \Phi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \Phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \Phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \Phi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \Phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \Phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \langle \Phi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \Phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle & \dots & \dots & \langle \Phi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \Phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \langle \Phi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \Phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle & \dots & \dots & \langle \Phi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \Phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \\ \vdots \\ \Phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n - 2m) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \end{aligned}$$

对于任意函数  $f(x) \in L^2(R)$ , 如果令  $c_{j,n,k} = \langle f(\cdot), \Phi_{2^j}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^j} \right| \rangle$  和

$$C_{j,n} = \begin{pmatrix} c_{j,n,1} \\ \vdots \\ c_{j,n,K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(\cdot), \Phi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{n}{2^j} \right| \rangle \\ \vdots \\ \langle f(\cdot), \Phi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{n}{2^j} \right| \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^j}^{(1)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^j}^{(K)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^j} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx$$

则利用多尺度矩阵方程, 可以从  $C_{j+1,n}$  得到  $C_{j,n}$

$$\begin{aligned} C_{j,m} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^j} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n - 2m) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \right| dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n - 2m) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n - 2m) C_{j+1,n} \end{aligned}$$

类似地, 令  $G(n) = \begin{pmatrix} g^{(1,1)}(n) & \dots & \dots & g^{(1,K)}(n) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g^{(K,1)}(n) & \dots & \dots & g^{(K,K)}(n) \end{pmatrix}$ , 这里  $g^{(p,q)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2^{(p)}(t) \Phi^{(q)}(t-x) dt, 1 \leq p, q \leq K$ ,

于是, 根据标准正交基的性质, 我们可以得到多小波矩阵方程:

$$\Psi_{2^j} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| = \begin{pmatrix} \psi_{2^j}^{(1)} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| \\ \vdots \\ \psi_{2^j}^{(K)} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \langle \psi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \dots \dots \langle \psi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \\ \vdots \\ \langle \psi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \dots \dots \langle \psi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \\ \vdots \\ \phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(n - 2m) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right|$$

对于任意  $f(x) \in L^2(R)$ , 如果令  $d_{j,n,k} = \langle f(\cdot), \psi_{2^j}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^j} \right| \rangle$  和

$$\mathbf{D}_{j,n} = \begin{pmatrix} d_{j,n,1} \\ \vdots \\ d_{j,n,K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(\cdot), \psi_{2^j}^{(1)} \left| \cdot - \frac{n}{2^j} \right| \rangle \\ \vdots \\ \langle f(\cdot), \psi_{2^j}^{(K)} \left| \cdot - \frac{n}{2^j} \right| \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{2^j}^{(1)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{2^j}^{(K)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{2^j} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx$$

则利用多小波矩阵方程, 可以从  $\mathbf{C}_{j+1,n}$  得到  $\mathbf{D}_{j,m}$

$$\mathbf{D}_{j,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{2^j} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(n - 2m) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \right| dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(n - 2m) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(n - 2m) \mathbf{C}_{j+1,n}$$

### 1.2.2 重建的快速算法

因为  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ , 故  $\left\{ \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right|, \psi_{2^j}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| \mid 1 \leq k \leq K, n \in Z \right\}$  构成  $V_{j+1}$  的标准正交基, 根据标准正交基的性质, 则有

$$\phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| = \sum_{k=1}^K \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right|, \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{m}{2^{j+1}} \right| \rangle \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{m}{2^{j+1}} \right| +$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| \cdot - \frac{n}{2^{j+1}} \right|, \psi_{2^j}^{(k)} \left| \cdot - \frac{m}{2^j} \right| \rangle \psi_{2^j}^{(k)} \left| x - \frac{m}{2^j} \right|$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^K h^{(k,p)}(n - 2m) \phi_{2^{j+1}}^{(k)} \left| x - \frac{m}{2^{j+1}} \right| + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^K g^{(k,p)}(n - 2m) \psi_{2^j}^{(k)} \left| x - \frac{m}{2^j} \right|$$

或写成矩阵的形式

$$\Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| = \begin{pmatrix} \phi_{2^{j+1}}^{(1)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \\ \vdots \\ \phi_{2^{j+1}}^{(K)} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}^T(n - 2m) \Phi_{2^j} \left| x - \frac{m}{2^j} \right| + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^T(n - 2m) \Psi_{2^j} \left| x - \frac{m}{2^j} \right|$$

利用上式, 可以从  $C_{j,n}$  和  $D_{j,n}$  重建  $C_{j+1,n}$

$$C_{j+1,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^{j+1}} \left| x - \frac{n}{2^{j+1}} \right| dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H^T(n-2m) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_{2^j} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G^T(n-2m) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{2^j} \left| x - \frac{n}{2^j} \right| dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H^T(n-2m) C_{j,m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G^T(n-2m) D_{j,m}$$

### 1.2.3 多小波变换快速算法的框图

多小波变换快速算法的框图如图 2 所示:

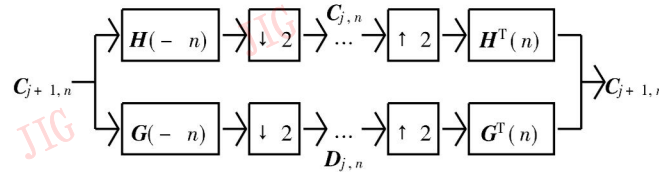


图 2 多小波变换快速算法的框图

图 2 中的  $C_{j+1,n}$ 、 $C_{j,n}$  和  $D_{j,n}$  是矢量序列,  $H(n)$  和  $G(n)$  是矩阵. 当  $K=1$  时, 也即多小波蜕变为单小波时, 上面的框图就是 Mallat 算法<sup>[6]</sup>的框图.

## 2 图象的多小波分解

### 2.1 信号的预处理

从图 2 可见, 只有矢量序列才能进行多小波变换. 因此, 普通的离散信号(标量序列) 必须经过预处理才能进行多小波变换. 下面以 GHM 多小波<sup>[1,7]</sup>为例说明预处理的过程. 设有一连续信号, 因为构成的标准正交基, 则有

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(\cdot), \varphi^{(1)}(\cdot-n) \rangle \varphi^{(1)}(x-n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(\cdot), \varphi^{(2)}(\cdot-n) \rangle \varphi^{(2)}(x-n) \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n,1} \varphi^{(1)}(x-n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n,2} \varphi^{(2)}(x-n)$$

从图 1 可见,  $\varphi^{(1)}(x)$  和  $\varphi^{(2)}(x)$  的非零区域不超过  $[0, 2]$ . 而且, 除  $x=1$  外,  $\varphi^{(1)}(x)$  和  $\varphi^{(2)}(x)$  在整数点上取零值. 于是, 又有

$$\left\{ \begin{aligned} f(k+1) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n,1} \varphi^{(1)}(k+1-n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n,2} \varphi^{(2)}(k+1-n) = c_{0,k,2} \varphi^{(2)}(1) \\ f\left|k + \frac{1}{2}\right| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n,1} \varphi^{(1)}\left|k + \frac{1}{2} - n\right| + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n,2} \varphi^{(2)}\left|k + \frac{1}{2} - n\right| \\ &= c_{0,k,1} \varphi^{(1)}\left|\frac{1}{2}\right| + c_{0,k-1,2} \varphi^{(2)}\left|\frac{3}{2}\right| + c_{0,k,2} \varphi^{(2)}\left|\frac{1}{2}\right| \end{aligned} \right.$$

由此可得

$$C_{0,k} = \begin{bmatrix} c_{0,k,1} \\ c_{0,k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi^{(2)}\left|\frac{3}{2}\right|}{\varphi^{(1)}\left|\frac{1}{2}\right| \varphi^{(2)}(1)} f(k) + \frac{1}{\varphi^{(1)}\left|\frac{1}{2}\right|} f\left|k + \frac{1}{2}\right| - \frac{\varphi^{(2)}\left|\frac{1}{2}\right|}{\varphi^{(1)}\left|\frac{1}{2}\right| \varphi^{(2)}(1)} f(k+1) \\ \frac{1}{\varphi^{(2)}(1)} f(k+1) \end{bmatrix}$$

如果我们把  $f(x)$  在整数点和半整数点上的抽样看成是离散信号, 也即  $x(n) = f\left|\frac{n}{2}\right|$ , 则有

$$C_{0,k} = \begin{bmatrix} c_{0,k,1} \\ c_{0,k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi^{(2)} \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \varphi^{(2)}(1)} x(2k) + \frac{1}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor} x(2k+1) - \frac{\varphi^{(2)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \varphi^{(2)}(1)} x(2k+2) \\ \frac{1}{\varphi^{(2)}(1)} x(2k+2) \end{bmatrix}$$

2.2 图象的多小波分解

同样地,一幅  $N \times M$  的图象  $f(n, m)$ , 其中  $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq M-1$ , 若对其进行多小波变换(分解), 则先要把  $f(n, m)$  转化为矢量图象  $g(n, m)$ . 下面介绍三种转化的方法, 其中前二种方法参见文献[2]及文献[7], 第三种方法是根据前二种方法提出的改进方法.

(1) 第一种方法按下面的公式把  $f(n, m)$  转化为  $g(n, m)$ :

$$g(n, m) = \begin{bmatrix} f(2n, m) \\ f(2n+1, m) \end{bmatrix}$$

其实, 这种方法就是把  $f(n, m)$  相邻的二行做为  $g(n, m)$  的一行. 这样得到的  $g(n, m)$  是一幅  $\frac{N}{2} \times M$  的矢量图象, 即每个象素有二个分量. 对  $g(n, m)$  进行多小波分解, 得到 4 幅  $\frac{N}{4} \times \frac{M}{2}$  的矢量子带图象, 见图 3(a).

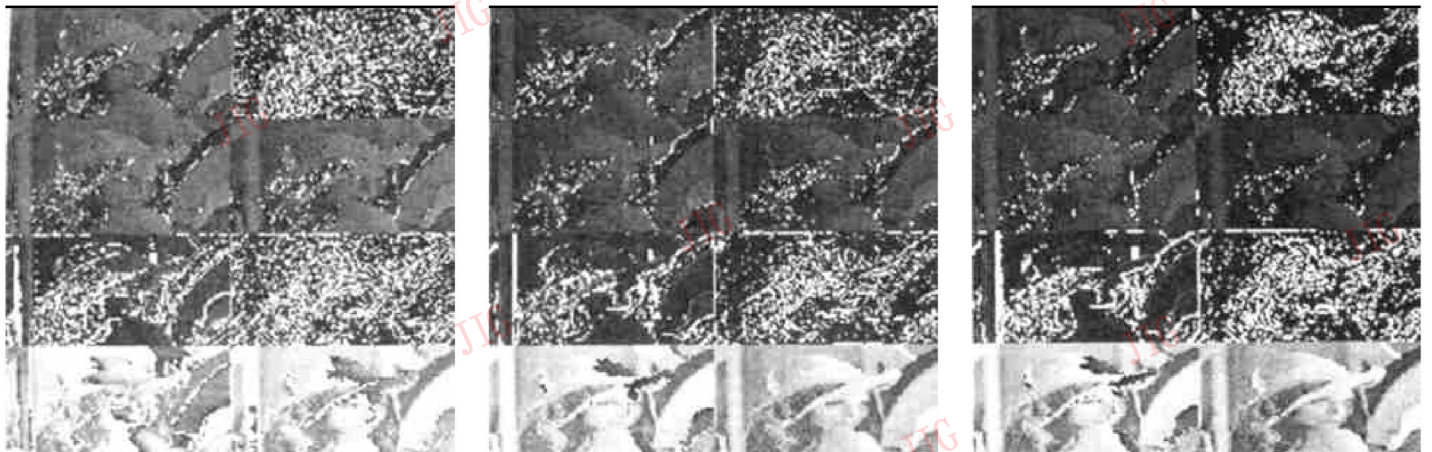
(2) 第二种方法按下面的公式把  $f(n, m)$  转化为  $g(n, m)$ :

$$g_{n,m} = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi^{(2)} \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \varphi^{(2)}(1)} f(2n, m) + \frac{1}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor} f(2n+1, m) - \frac{\varphi^{(2)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \varphi^{(2)}(1)} f(2n+2, m) \\ \frac{1}{\varphi^{(2)}(1)} f(2n+2, m) \end{bmatrix}$$

其实, 这种方法就是把  $f(n, m)$  的列看成离散信号, 然后按照 2.1 节得到的预处理公式转化为  $g(n, m)$  的一列. 这样得到的  $g(n, m)$  是一幅  $\frac{M}{2} \times N$  的矢量图象, 每个象素有二个分量. 对  $g(n, m)$  进行多小波分解, 得到 4 幅  $\frac{M}{4} \times \frac{N}{2}$  的矢量子带图象, 见图 3(b).

(3) 第三种方法按下面的公式把  $f(n, m)$  转化为  $g(n, m)$ :

$$g_{n,m} = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi^{(2)} \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \varphi^{(2)}(1)} f(2n, m) + \frac{1}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor} f(2n+1, m) - \frac{\varphi^{(2)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor}{\varphi^{(1)} \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \varphi^{(2)}(1)} f(2n, m+1) \\ \frac{1}{\varphi^{(2)}(1)} f(2n, m+1) \end{bmatrix}$$



(a) 第一种预处理方法

(b) 第二种预处理方法

(c) 第三种预处理方法

图3 图象的多小波分解(右边为第一分量图, 左边为第二分量图)

其实, 这种方法是先把  $f(n, m)$  相邻的二行看成是某个连续信号的抽样, 其中第一行看成是信号在整数点上的抽样, 第二行看成是信号在半整数点上的抽样, 然后按照 2.1 节得到的预处理公式转化为  $g(n, m)$  的一行. 这样得到的  $g(n, m)$  是一幅  $\frac{N}{2} \times M$  的矢量图象, 每个象素有二个分量. 对  $g(n, m)$  进行多小波分解, 得到 4 幅  $\frac{N}{4} \times \frac{M}{2}$  的矢量子带图象, 见图 3(c).

通过对 LL 子带图象所占能量百分比的统计, 我们发现: 第一种方法占 97.9%; 第二种方法占 98.4%; 第三种方法占 98.6%; 从图象的视觉效果也可以验证这一点. 由于 LL 子带图象所占能量百分比愈多, 编码增益愈高. 因此, 第三种方法的效果最好.

### 3 图象多小波系数的编码

图象的多小波系数也即图象经过多小波变换后得到的各个子带图象.

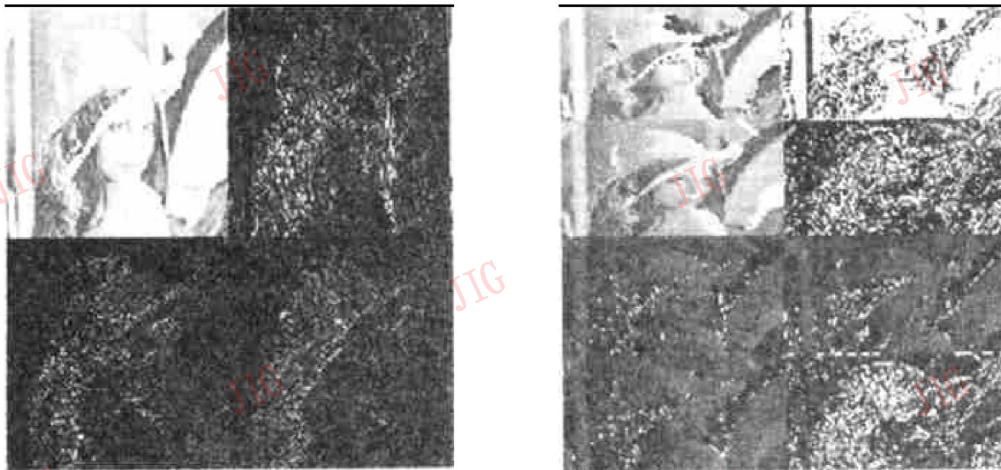
图 4(a) 表示图象经过 D9/7 单小波<sup>[8]</sup>分解的结果, 图 4(b) 表示图象经过 GHM 多小波分解的结果. 比较这二幅图象, 我们可以看到图象多小波系数的一些特点:

(1) 图象经过多小波变换, 分解成 4 幅矢量子

带图象, 每幅矢量子带图象由多幅分量图组成. 分量图的数目与多小波中的小波数目相同. 如 GHM 多小波有二个小波, 因此, 每幅矢量子带图象由二幅分量图组成.

(2) 从图 4(b) 可以看到, 同一幅矢量子带图象的二个分量图具有非常强的相关性, LL 矢量子带图象的二个分量图尤其如此. LL 子带图象能量占整幅图象能量的 98.6%, 图象编码时绝大多数比特都分配给了 LL 子带图象. 因此, 如果我们能够利用 LL 子带图象二个分量图之间的相关性进行编码, 将大大提高压缩比. 目前, 多小波图象编码的效果与单小波图象编码的效果难分伯仲<sup>[2]</sup>, 个中原因, 恐怕是图象多小波编码尚未利用分量图之间相关性的缘故. 如果不考虑这一因素, 简单应用多小波变换进行图象编码, 可能会弄巧成拙.

(3) 图象经过 GHM 多小波分解后, LL 子带图象能量所占的比例不及经过 D9/7 单小波分解后 LL 子带图象能量所占的比例. 换句话说, 有许多能量分布在 LH、HL 和 HH 子带图象中, 需要较多的比特来编码. 多小波图象编码的效果与单小波图象编码的效果难分伯仲, 这恐怕也是原因之一. 要解决这个问题, 恐怕有待比 GHM 多小波性能更好的多小波出现.



(a) D9/7 单小波

(b) GHM 多小波

图 4 图象的小波分解

根据图象多小波系数的特点, 我们的编码方案大致如下:

• 先对图象进行多小波分解 (例如进行三次多小波分解), 产生各个矢量子带图象

$$\begin{aligned} LL_1 &= [LL_1^{(1)}, LL_1^{(2)}], LH_1 = [LH_1^{(1)}, LH_1^{(2)}], HL_1 = [HL_1^{(1)}, HL_1^{(2)}], HH_1 = [HH_1^{(1)}, HH_1^{(2)}] \\ LH_2 &= [LH_2^{(1)}, LH_2^{(2)}], HL_2 = [HL_2^{(1)}, HL_2^{(2)}], HH_2 = [HH_2^{(1)}, HH_2^{(2)}] \\ LH_3 &= [LH_3^{(1)}, LH_3^{(2)}], HL_3 = [HL_3^{(1)}, HL_3^{(2)}], HH_3 = [HH_3^{(1)}, HH_3^{(2)}] \end{aligned}$$

式中,  $LL_1, LH_1, \dots$  表示最低分辨率的矢量子带图象, 下标 1, 2, 3 表示多小波分解后的层数; 上标 (1), (2) 表示第 1, 第 2 维分量图.

- 利用图象单小波系数的编码方法对其中一个分量(例如第一分量)进行编码

$$LL^{(1)}, LH_1^{(1)}, HL_1^{(1)}, HH_1^{(1)}, LH_2^{(1)}, HL_2^{(1)}, HH_2^{(1)}, LH_3^{(1)}, HL_3^{(1)}, HH_3^{(1)}$$

图象单小波系数编码的研究已有十年的历史,有各种各样的方法可资利用.

- 对第一分量与第二分量的差值进行编码

$$\Delta LL_1 = LL_1^{(1)} - LL_1^{(2)}, \Delta LH_1 = LH_1^{(1)} - LH_1^{(2)}, \Delta HL_1 = HL_1^{(1)} - HL_1^{(2)}, \Delta HH_1 = HH_1^{(1)} - HH_1^{(2)}$$

$$\Delta LH_2 = LH_2^{(1)} - LH_2^{(2)}, \Delta HL_2 = HL_2^{(1)} - HL_2^{(2)}, \Delta HH_2 = HH_2^{(1)} - HH_2^{(2)}$$

$$\Delta LH_3 = LH_3^{(1)} - LH_3^{(2)}, \Delta HL_3 = HL_3^{(1)} - HL_3^{(2)}, \Delta HH_3 = HH_3^{(1)} - HH_3^{(2)}$$

$\Delta LL_1, \Delta LH_1, \dots$ 表示二维分量图的差值图.

由于二个分量具有相关性,它们的差值很小,可以分配较小的比特.

篇幅所限,我们将另文详细叙述图象多小波系数的编码方法.这里,我们仅给出一个简单的例子.

图5(a)表示图象经过一次GHM多小波分解的结果,图5(b)表示二个分量的差值图.由于二个分量

具有相关性,故差值较小,图也就比较暗.图6(a)表示对图5(b)的第一分量图和差值图量化后再重构的结果(没有进行游程或零树编码,也没有进行熵编码).图6(b)表示对图4(a)的单小波分解图量化后再重构的结果.在相同压缩比的条件下(6bpp,即1.5倍),多小波重构图象的信噪比为38.08dB,单小波重构图象信噪比则为36.65dB.

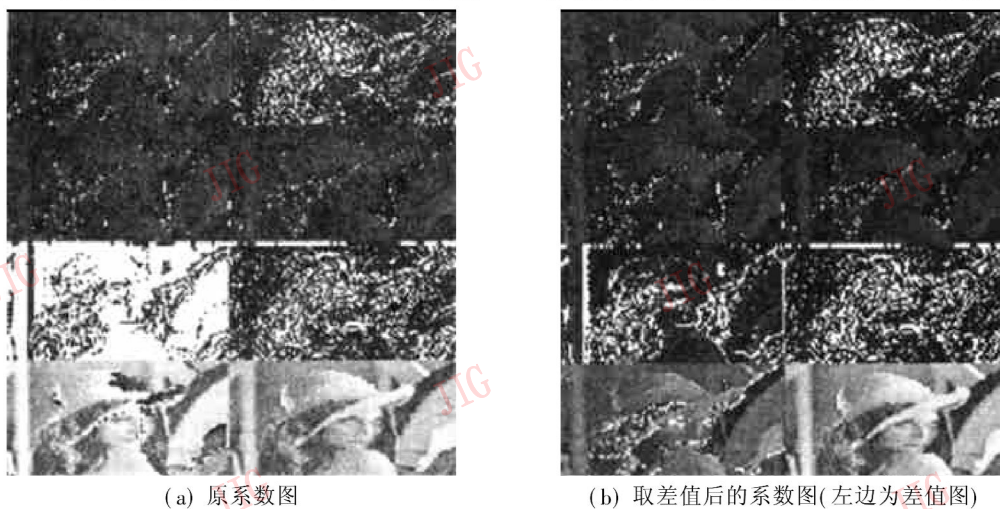


图5 图象多小波系数的编码

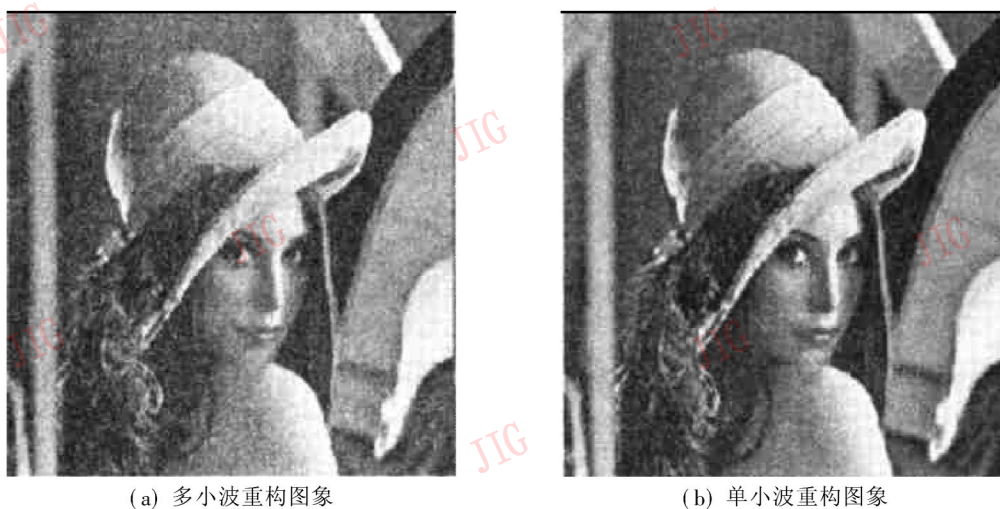


图6 重构图象

## 4 结论

多小波图象编码的研究方兴未艾,根据我们的

粗浅实践,下面二个值得着重考虑.

- (1) 一幅图象经过多次单小波变换,分解成不同方向、不同分辨率的子带图象,其中同方向、不同分辨率的子带图象之间具有相似性;而同分辨率、不

同方向的子带图象之间具有相关性. 这些性质是单小波图象编码提高压缩比的根据. 一幅图象经过多次多小波变换后, 除了仍具备上述所说的图象单小波分解的性质之外, 每个矢量子带图象各个分量之间还具有很强的相关性. 怎样利用这种相关性进行图象编码是多小波图象编码取得成功的关键, 否则, 多小波图象编码相对于单小波图象编码似乎并无特别的优势可言, 甚至可能会弄巧成拙.

(2) 从图象编码的角度来说, GHM 多小波能量汇聚的能力不如一些性能优良的单小波, 其它一些多小波<sup>[9,10]</sup>的效果也是差强人意. 需要根据图象编码的要求, 研究新的多小波.

### 参考文献

- 1 Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. *Journal of Approximation Theory*, 1994, 78: 373~ 401.
- 2 Heller P N, Strela V, Strang G *et al.* Multiwavelet filter banks for data compression. *IEEE Symp. Circuits and Systems*, 1995, 1796~ 1799.
- 3 Strela V. Multiwavelets: Theory and Application. Ph. D. Thesis, MIT, 1996.
- 4 Heller P, Strang G, Topiwala P *et al.* The application of multi-wavelet filter banks to signal and image processing. *IEEE Trans. Image Processing*, 1998.
- 5 Strang G, Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1995, 43(1): 108~ 115.

- 6 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans on PAMI*, 1989, 11: 674~ 693.
- 7 Xia X G, Geronimo J S, Hardin D P *et al.* Design of prefilter for discrete multiwavelet transform. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1996, 44(1): 25~ 35.
- 8 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* 1988, 41: 909~ 996.
- 9 Goodman T N T, Lee S L. Wavelets of multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, 342: 307~ 342.
- 10 Alpert B. A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral operators. *SIAM J. Math. Analysis*, 1993, 24.



黄卓君 中山大学电子系通信与信息系统专业硕士研究生, 研究方向为多媒体数据处理与传输.



马争鸣 华南理工大学学士、硕士, 清华大学博士, 中山大学电子系副教授, 主要学术兴趣为小波分析, 分形几何和人工神经网络.